

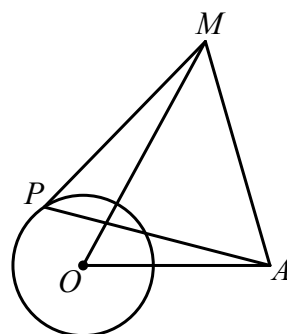
第2讲瓜豆原理与费马点问题练习

一、瓜豆原理

练习1

1. 2019~2020学年广东广州荔湾区初三上学期期末第10题3分 ★★

如图，已知 $\odot O$ 的半径为3， $OA = 8$ ，点 P 为 $\odot O$ 上一动点，以 PA 为边作等边 $\triangle PAM$ ，则线段 OM 的长的最大值为（ ）。



A. 14

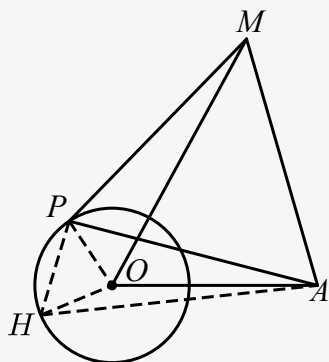
B. 9

C. 12

D. 11

【答案】D

【解析】如图，以 OP 为边向下作等边 $\triangle POH$ ，连接 AH 。



$\because \triangle POH, \triangle APM$ 都是等边三角形，

$\therefore PH = PO, PA = PM, \angle HPO = \angle APM = 60^\circ,$

$\therefore \angle HPA = \angle OPM,$

$\therefore \triangle HPA \cong \triangle OPM \text{ (SAS)},$

$\therefore AH = OM,$

$\because AH \leq OH + AO, \text{即 } AH \leq 11,$

$\therefore AH$ 的最大值为11，

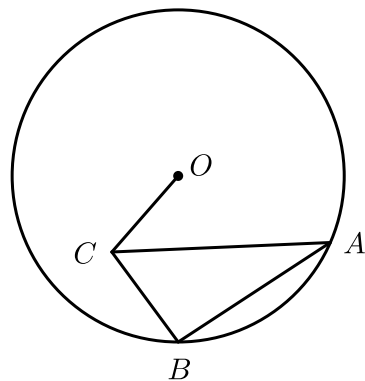
$\therefore OM$ 的最大值为11。

故选 D .

【标注】【知识点】瓜豆原理（轨迹与最值）：轨迹为弧

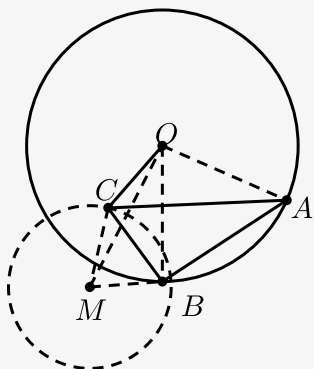
2. ★★★

如图， $\odot O$ 半径为 3， $\triangle ABC$ 的顶点 A, B 在 $\odot O$ 上， $\angle B = 90^\circ$ ，点 C 在 $\odot O$ 内，且 $\angle A = 30^\circ$ ，当点 A 在圆上运动时， OC 的最小值为 _____ .



【答案】 $\sqrt{3}$

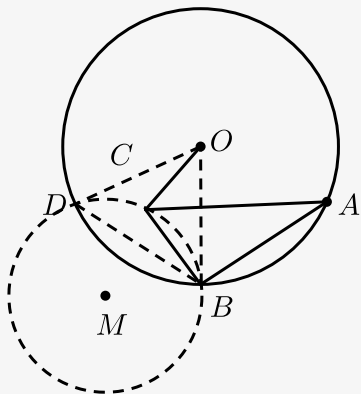
【解析】方法一：如图，



先视 B 为定点，构造 $\triangle BMO \sim \triangle BCA$ ，则 $\triangle BMC \sim \triangle BOA$ ，则 $\frac{CM}{AO} = \frac{BC}{BA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

则 C 的轨迹是以 M 为圆 $\sqrt{3}$ 为半径的圆 .

方法二：如图，



延长线 AC 交 $\odot O$ 于 D ，则 $\triangle DOB$ 为等边三角形，

又 $\because \angle DCB = 120^\circ$,

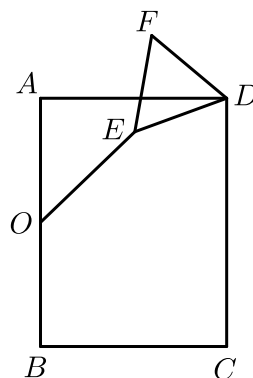
$\therefore C$ 的轨迹为 $\triangle DCB$ 的外圆.

综上, 最小值为 $\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】瓜豆原理(轨迹与最值): 轨迹为弧

3. 2020~2021学年湖北武汉青山区初三上学期期中第16题3分 ★★★

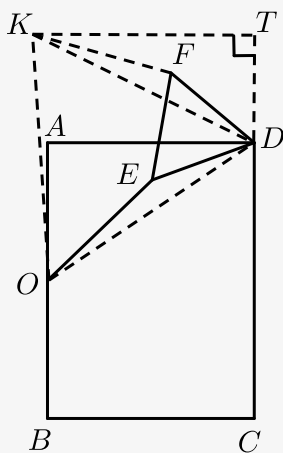
如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = \sqrt{3}$, O 为 AB 的中点, 将 OA 绕着点 O 旋转得到 OE , 连接 DE . 以 DE 为边作等边 $\triangle DEF$ (点 D 、 E 、 F 按顺时针方向排列), 连接 CF . 则 CF 的最小值为_____.



【答案】 $2\sqrt{3} - 1$

【解析】 对主动点 E : 向上构等边三角形得 FED ,

对主动点所在圆心 O : 向上构等边三角形得 KOD ,



则 $\triangle DEO \cong \triangle DFK(SAS)$,

$\therefore KF = OE = OA = 1$, $\therefore F$ 在以 K 为圆心, 1为半径的圆上运动,

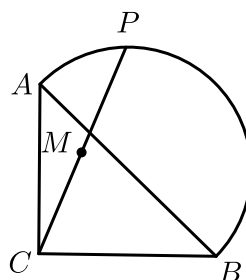
$$CK = \sqrt{DT^2 + KT^2} = \sqrt{3^2 + 3} = 2\sqrt{3}.$$

当 C 、 K 、 F 共线时取最值, 最小值为 $CF = 2\sqrt{3} - 1$.

【标注】【知识点】瓜豆原理(轨迹与最值): 轨迹为弧

4. 2020~2021学年湖北武汉武昌区初三上学期期中（七校联考）第10题3分 ★★

如图，在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = BC = 2\sqrt{6}$ ，点 P 在以 AB 为直径的半圆上， M 为 PC 的中点。当点 P 沿半圆从点 A 运动至点 B 时，点 M 运动的路径长是（ ）。



A. $\sqrt{2}\pi$

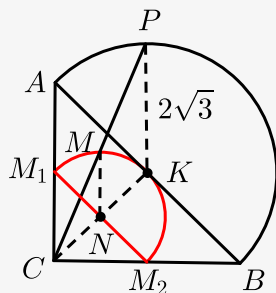
B. $\sqrt{3}\pi$

C. $2\sqrt{3}$

D. $\sqrt{6}$

【答案】 B

【解析】 方法一：



取 AB 中点 K ，连接 CK ，取 CK 中点 N ，

$\because$ 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = BC = 2\sqrt{6}$ ，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 4\sqrt{3}$ ，

$\therefore PK = 2\sqrt{3}$ ，

则 $MN = \frac{1}{2}PK = \sqrt{3}$ ，

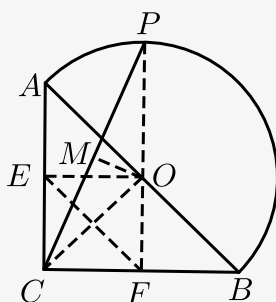
故 M 的轨迹在以 N 为圆心，半径为 $\sqrt{3}$ 的圆上。

$\therefore l_M = \frac{180 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{180} = \sqrt{3}\pi$ 。

故选 B。

方法二：取 AB 的中点 O ， AC 的中点 E ， BC 的中点 F ，

连结 OC ， OP ， OM ， OE 、 OF ， EF ，如图。



$\because$ 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = BC = 2\sqrt{6}$ ，

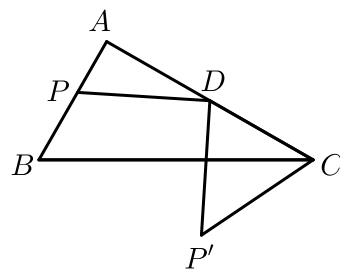
$\therefore AB = \sqrt{2}BC = 4\sqrt{3}$,
 $\therefore OC = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$, $OP = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$.
 $\therefore M$ 为 PC 的中点 ,
 $\therefore OM \perp PC$,
 $\therefore \angle CMO = 90^\circ$,
 $\therefore$ 点 M 在以 OC 为直径的圆上 ,
 P 点在 A 点时 , M 点在 E 点 ;
 P 点在 B 点时 , M 点在 F 点 , 易得四边形 $CEOF$ 为正方形 ,
 $EF = OC = 2\sqrt{3}$,
 $\therefore M$ 点的路径为以 EF 为直径的半圆 ,
 $\therefore$ 点 M 运动的路径 $= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}\pi$.
 故选 B .

【标注】【知识点】瓜豆原理（轨迹与最值）：轨迹为弧

练习3

5. 2017~2018学年3月浙江金华初三下学期月考第10题3分 ★★★

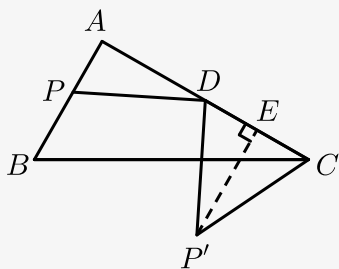
如图所示，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， D 为 AC 中点， P 为 AB 上的动点，将 P 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到 P' ，连接 CP' ，则线段 CP' 的最小值为（ ）。



- A. 1.6 B. 2.4 C. 2 D. $2\sqrt{2}$

【答案】 C

【解析】 如图所示，过 P' 作 $P'E \perp AC$ 于 E ，



则 $\angle A = \angle P'ED = 90^\circ$,
 由旋转可得， $DP = P'D$ ， $\angle PDP' = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ADP = \angle EP'D,$$

在 $\triangle DAP$ 和 $\triangle P'ED$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADP = \angle EP'D \\ \angle A = \angle P'ED \\ DP = P'D \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DAP \cong \triangle P'ED (\text{AAS}),$$

$$\therefore P'E = AD = 2,$$

$\therefore$ 当 $AP = DE = 2$ 时, $DE = DC$, 即点 E 与点 C 重合,

$$\text{此时 } CP' = EP' = 2,$$

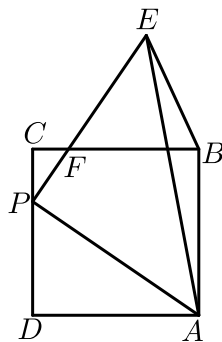
$\therefore$ 线段 CP' 的最小值为 2.

故选 C.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

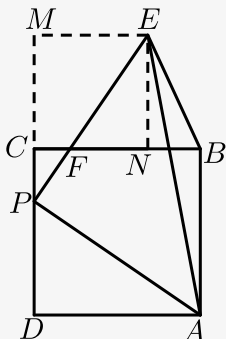
6. ★★

如图, 边长为 8 的正方形 $ABCD$ 中, 动点 P 在 CD 边上, 以 AP 为直角边向上作等腰 $\text{Rt}\triangle APE$, 边 PE 与 BC 交于点 F , 连接 BE , 则线段 BE 在运动过程的最小值为 _____.



【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】 如图, 过点 E 作 $EM \perp CD$ 于 M , 过点 E 作 $EN \perp CB$ 于 N ,



设 $CP = x$,

则 $EN = MC = 8 - x$, $NB = x$,

$$\therefore BE = \sqrt{EN^2 + NB^2}$$

$$= \sqrt{(8-x)^2 + x^2}$$

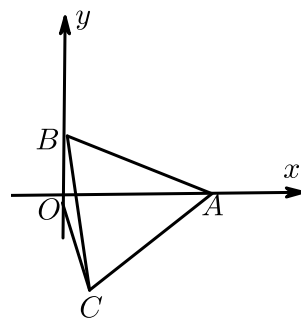
$$= \sqrt{2(x-4)^2 + 32},$$

∴当 $x = 4$ 时, BE 的值最小, 最小值为 $4\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】瓜豆原理(轨迹与最值): 轨迹为直线

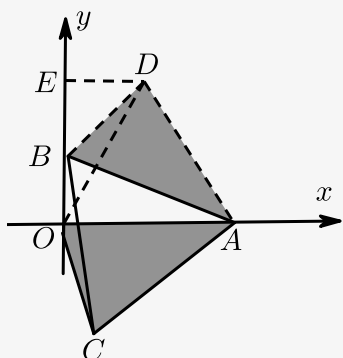
7. ★★★★★

如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(4, 0)$, B 为 y 轴正半轴一动点, 连接 AB , 以 AB 为一边向下作等边 $\triangle ABC$, 连接 OC , 则 OC 的最小值为 _____.



【答案】 2

【解析】 以 OA 为边向上方作等边 $\triangle OAD$ (构造“双子型”), 连接 BD ,



显然有 $\triangle ADB \cong \triangle AOC$ (SAS), 则 $OC = BD$.

D 为定点, 动点 B 在 y 轴上, 根据“点到直线的距离, 垂线段最短”,

可知当 $DE \perp y$ 轴时(即 E, B 重合时),

DB 最短, 此时 $DB = 2$. 故 OC 的最小值为 2.

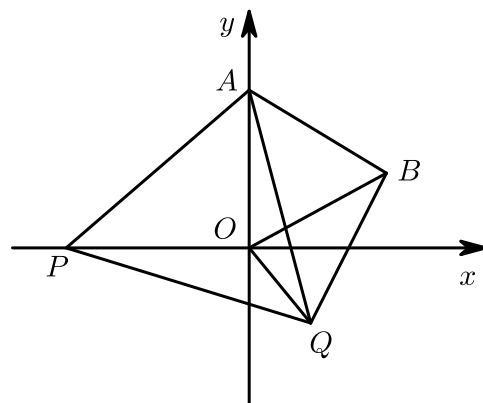
【标注】【知识点】SAS

【知识点】垂线段最短

【能力】推理论证能力

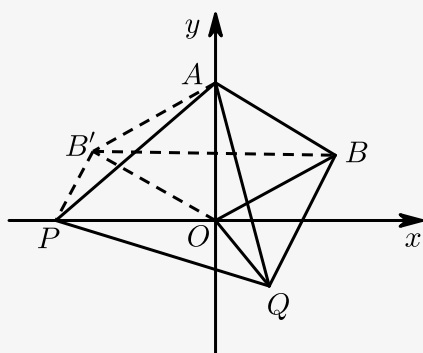
8. ★★★★★

如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(0, 2)$, $\triangle AOB$ 是等边三角形. 点 P 是 x 轴上一动点, 以线段 AP 为一边, 在其右侧作等边 $\triangle APQ$. 在点 P 的运动过程中, OQ 的最小值为 _____.



【答案】 1

【解析】 作 B 关于 y 轴对称点 B' ，则 $\triangle OAB'$ 为等边三角形，



$\therefore \triangle AB'P \cong \triangle AOQ$ (SAS), $\therefore OQ = B'P$,

当 $B'P \perp x$ 轴时, $B'P = OQ$ 最小, 此时 $OQ_{\min} = B'P_{\min} = 1$.

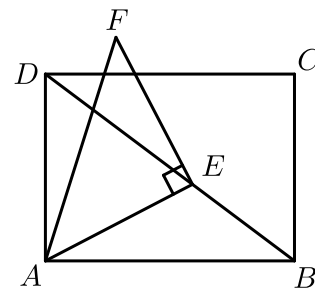
故答案为: 1.

【标注】 【知识点】 垂线段最短

练习4

9. ★★★

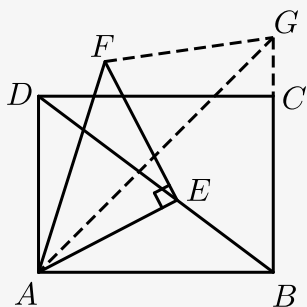
矩形 $ABCD$, $AB = 4$, $AD = 3$, 等腰 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $AE = EF$, E 在 BD 上, 当 E 从 B 运动到 D 时, 点 F 的路径长为 _____.



【答案】 $5\sqrt{2}$

【解析】法一：

如图，延长 BC 至 G ， $BG = BA$ ，连接 AG ，



$\therefore \triangle ABG$ 为等腰直角三角形，

连接 FG ，

$\therefore \angle FAE = \angle GAB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle FAG = \angle EAB$ ，

又 $\because \frac{AF}{AE} = \sqrt{2} = \frac{AG}{AB}$ ，

$\triangle FAG \sim \triangle EAB$ ，

$\therefore \frac{FG}{EB} = \sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 点 E 轨迹 $BD = 5$ ，

$\therefore FG$ 的最大值为 $5\sqrt{2}$ ，

法二：

由瓜豆原理可知， A 为定点， E 为主动点， F 为从动点，

当 E 在 BD 上运动时， F 轨迹也为线段，且为点 E 的 $\sqrt{2}$ 倍，

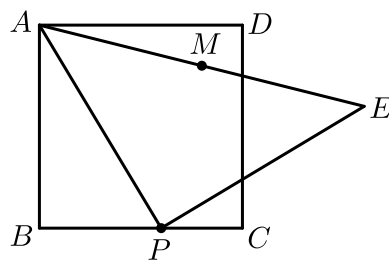
由已知 $BD = 5$ ，即点 E 路径长为 5，

故点 F 路径长为 $5\sqrt{2}$ 。

【标注】【知识点】瓜豆原理（轨迹与最值）：轨迹为直线

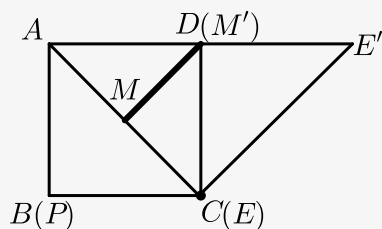
10. ★★★

如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 P 为 BC 边上一动点，以 AP 为直角边作等腰 $\text{Rt}\triangle APE$ ， M 为边 AE 的中点，当点 P 从点 B 运动到点 C ，则点 M 的运动路径长为 _____。



【答案】 $2\sqrt{2}$

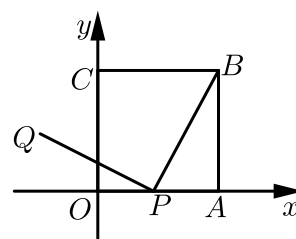
【解析】如图， M 的轨迹为线段 MM' ，长度为 $2\sqrt{2}$ 。



【标注】【知识点】瓜豆原理（轨迹与最值）：轨迹为直线

11. 2018~2019学年浙江宁波鄞州区宁波市鄞州蓝青学校初二下学期期末第16题4分 ★★★

如图，在正方形 $OABC$ 中， A, C 落在坐标轴上， $B(8, 8)$ ， P 为 OA 上的一个动点， $BP \perp PQ$ ， $BP = PQ$ ，当点 P 从 A 运动到 $PA = 6$ 时，则点 Q 的运动路径长为 _____。



【答案】 $6\sqrt{2}$

【解析】在 AB 上截取 $AM = AP$ ，连接 PM 、 OQ ，

$\because$ 四边形 $OABC$ 是正方形，

$\therefore OA = AB$ ， $\angle OAB = 90^\circ$ ，

$\because AM = AP$ ，

$\therefore OP = BM$ ， $\angle AMP = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BMP = 135^\circ$ ，

$\because BP \perp PQ$ ，

$\therefore \angle OPQ + \angle BPA = 90^\circ$ ，

$\because \angle ABP + \angle BPA = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle OPQ = \angle ABP$ 。

在 $\triangle POQ$ 和 $\triangle BMP$ 中，

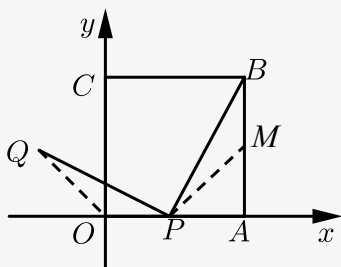
$$\begin{cases} PO = BM \\ \angle OPQ = \angle MBP \\ PQ = BP \end{cases}$$

$\therefore \triangle POQ \cong \triangle BMP$ (SAS)，

$\therefore \angle POQ = \angle BMP = 135^\circ$ ， $OQ = MP$ ，

P 点从 A 运动到 $PA = 6$ ，

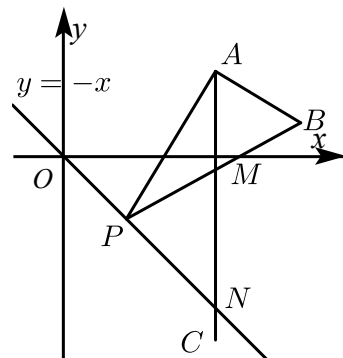
点 M 和点 Q 也跟随移动，但 $\angle POQ$ 始终等于 135° 不变， OQ 也始终等于 MP ，
 $\therefore$ 当 $AP = 6$ 时， $MP = 6\sqrt{2}$ ，即点 Q 的运动路径长为 $6\sqrt{2}$ 。



【标注】【知识点】瓜豆原理（轨迹与最值）：轨迹为直线

12. 2013年浙江湖州中考真题第16题4分 ★★★★★

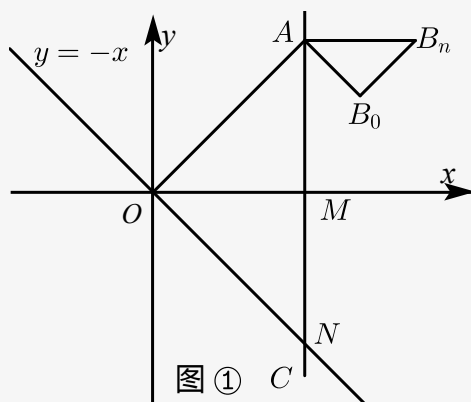
如图，已知点 A 是第一象限内横坐标为 $2\sqrt{3}$ 的一个定点， $AC \perp x$ 轴于点 M ，交直线 $y = -x$ 于点 N 。若点 P 是线段 ON 上的一个动点， $\angle APB = 30^\circ$ ， $BA \perp PA$ ，则点 P 在线段 ON 上运动时， A 点不变， B 点随之运动。求当点 P 从点 O 运动到点 N 时，点 B 运动的路径长是 _____。



【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 由题意可知， $OM = 2\sqrt{3}$ ，点 N 在直线 $y = -x$ 上， $AC \perp x$ 轴于点 M ，则 $\triangle OMN$ 为等腰直角三角形， $ON = \sqrt{2}OM = \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$ 。

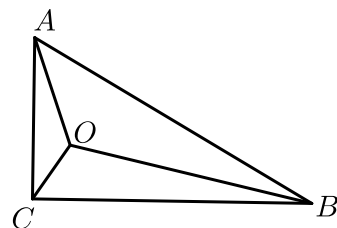
如答图①所示，



设动点 P 在 O 点（起点）时，点 B 的位置为 B_0 ，动点 P 在 N 点（终点）时，点 B 的位置为 B_n ，连接 B_0B_n ，

$\therefore AO \perp AB_0$ ， $AN \perp AB_n$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 1$, $BC = \sqrt{3}$, 点 O 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内一点, 连接 AO 、 BO 、 CO , 且 $\angle AOC = \angle COB = \angle BOA = 120^\circ$, 则 $OA + OB + OC =$ _____ .



【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = 1$, $BC = \sqrt{3}$,

$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 绕点 B 顺时针方向旋转 60° ,

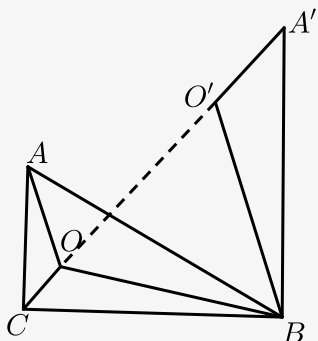
$$\therefore \angle A'BC = \angle ABC + 60^\circ = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore A'B \perp CB,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 1, \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2AC = 2,$$

$\therefore \triangle AOB$ 绕点 B 顺时针方向旋转 60° , 得到 $\triangle A'O'B$,



$$\therefore A'B = AB = 2, BO = BO', A'O' = AO,$$

$\therefore \triangle BOO'$ 是等边三角形,

$$\therefore BO = OO', \angle BOO' = \angle BO'O = 60^\circ,$$

$$\because \angle AOC = \angle COB = \angle BOA = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle COB + \angle BOO' = \angle BO'A' + \angle BO'O = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ,$$

$\therefore C$ 、 O 、 A' 、 O' 四点共线,

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle A'BC \text{ 中}, A'C = \sqrt{BC^2 + A'B^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore OA + OB + OC = A'O' + OO' + OC = A'C = \sqrt{7}.$$

【标注】 【知识点】费马点

14. 2017~2018学年1月浙江金华义乌市初二上学期月考第10题3分 ★★★

已知点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且它到三角形的三个顶点距离之和最小，则 P 点叫 $\triangle ABC$ 的费马点 (Fermat point)。已经证明：在三个内角均小于 120° 的 $\triangle ABC$ 中，当

$\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120^\circ$ 时， P 就是 $\triangle ABC$ 的费马点。若点 P 是腰长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形 DEF 的费马点，则 $PD + PE + PF = (\quad)$ 。

A. $2\sqrt{3}$

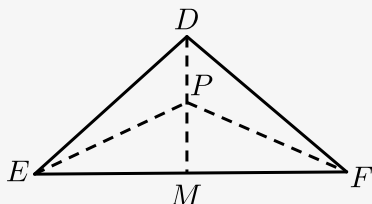
B. $1 + \sqrt{3}$

C. 6

D. $3\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】 过点 D 作 $DM \perp EF$ 于点 M ，在 $\triangle BDE$ 内部过 E 、 F 分别作 $\angle MEP = \angle MFP = 30^\circ$ ，则 $\angle EPF = \angle FPD = \angle EPD = 120^\circ$ ，点 P 就是费马点，



在等腰 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中， $DE = DF = \sqrt{2}$ ， $DM \perp EF$ ，

$$\therefore EF = \sqrt{2}DE = 2,$$

$$\therefore EM = DM = 1,$$

$$\text{故 } \cos 30^\circ = \frac{EM}{PE}$$

$$\text{解得：} PE = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 则 } PM = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{故 } DP = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 同法可得 } PF = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{则 } PD + PE + PF = 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} + 1.$$

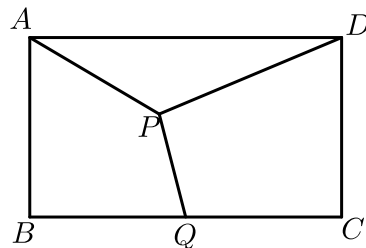
故选 B.

【标注】 【知识点】 费马点

15. ★★★★★

如图所示，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 10$ ， P 是矩形内部一点， Q 是 BC 中点，则

$PA + PD + PQ$ 的最小值为 _____。



【答案】 $6 + 5\sqrt{3}$

【解析】 $AD = 10$, $AQ = DQ = \sqrt{61}$, $S_{\triangle ADQ} = 30$, 最小值为

$$\sqrt{\frac{10^2 + 61 + 61 + 4\sqrt{3} \times 30}{2}} = 6 + 5\sqrt{3} .$$

【标注】【知识点】费马点

16. ★★★★★

小明遇到这样一个问题：如图 1，正方形 $ABCD$ 是正方形，点 M 对角线 BD 上任意一点，连接 AM 、 CM 。当 $AM + BM + CM$ 的最小值为 $\sqrt{3} + 1$ 时，求正方形的边长。

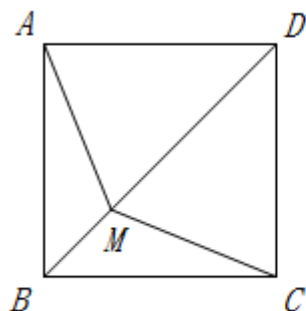


图1

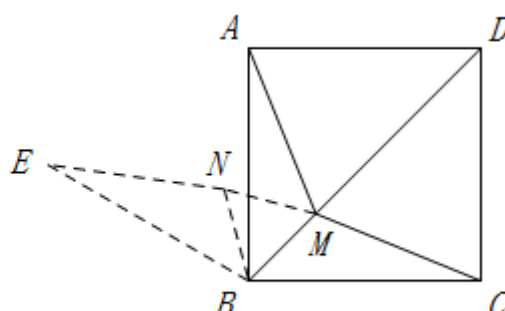


图2

小明是这样思考的：利用变换和等边三角形将边的位置重新组合。他的方法是以点 B 为旋转中心将 $\triangle ABM$ 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle EBN$ ，连接 MN ，此题可解，如图 2。

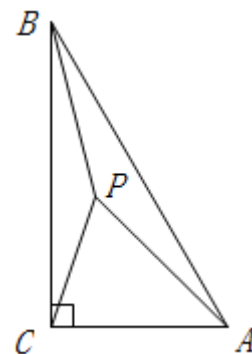
(1) 请你回答：

① 当点 M 在何处时， $AM + BM + CM$ 的值最小，并说明理由。

② 当 $AM + BM + CM$ 的最小值为 $\sqrt{3} + 1$ 时，求正方形的边长。

(2) 参考小明同学思考问题的方法，解决下列问题：

如图 3，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $AC = 1$ 。点 P 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内一点，连接 PA ， PB ， PC ，求 $PA + PB + PC$ 的最小值。



【答案】 (1) ① 当 M 点位于 BD 与 CE 的交点处时 $AM + BM + CM$ 的值最小, 即等于 EC 的长.

② 正方形的边长为 $\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{7}$

【解析】 (1) ① 易证, $\triangle AMB \cong \triangle ENB$.

$$\therefore AM = EN.$$

$$\because \angle MBN = 60^\circ, MB = NB,$$

$\therefore \triangle BMN$ 是等边三角形.

$$\therefore BM = MN.$$

$$\therefore AM + BM + CM = EN + MN + CM.$$

根据“两点之间线段最短”, 得 $EN + MN + CM = EC$ 最短,

$\therefore$ 当 M 点位于 BD 与 CE 的交点处时 $AM + BM + CM$ 的值最小, 即等于 EC 的长.

② 过 E 点作 $EF \perp BC$ 交 CB 的延长线于 F

$$\therefore \angle EBF = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

设正方形的边长为 x , 则 $BF = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $EF = \frac{x}{2}$,

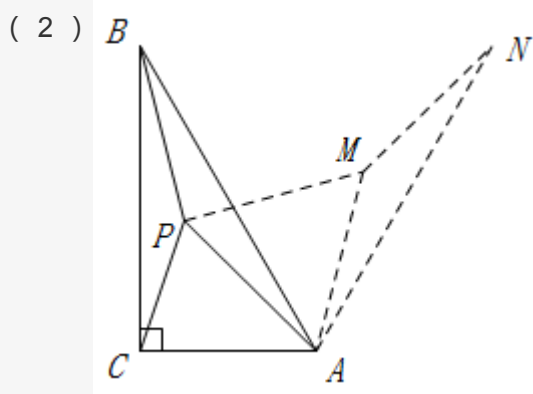
在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中,

$$\therefore EF^2 + FC^2 = EC^2,$$

$$\therefore \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + x\right)^2 = (\sqrt{3} + 1)^2,$$

解得, $x = \sqrt{2}$ (舍去负值),

$\therefore$ 正方形的边长为 $\sqrt{2}$.



【标注】【知识点】动点与线段-无数轴

17. ★★★★★

回答下列各题:

(1) 阅读证明

①如图 1，在 $\triangle ABC$ 所在平面上存在一点 P ，使它到三角形三顶点的距离之和最小，则称点 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，此时 $PA + PB + PC$ 的值为 $\triangle ABC$ 的费马距离。

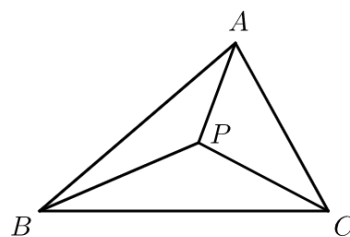


图1

②如图 2，已知点 P 为等边 $\triangle ABC$ 外接圆的 $\widehat{BC}$ 上任意一点。求证： $PB + PC = PA$ 。

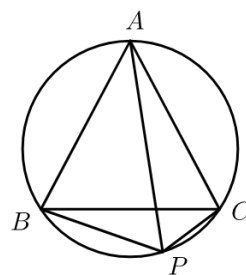


图2

(2) 知识迁移

根据(1)的结论，我们有如下探寻 $\triangle ABC$ (其中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 均小于 120°) 的费马点和费马距离的方法：

第一步：如图 3，在 $\triangle ABC$ 的外部以 BC 为边长作等边 $\triangle BCD$ 及其外接圆；

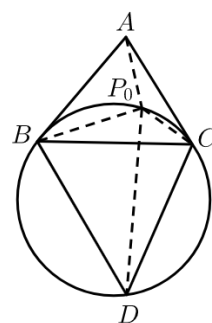


图3

第二步：在 $\widehat{BC}$ 上取一点 P_0 ，连接 P_0A, P_0B, P_0C, P_0D 。易知

$$P_0A + P_0B + P_0C = P_0A + (P_0B + P_0C) = P_0A + \underline{\hspace{2cm}} ;$$

第三步：根据(1)①中定义，在图 3 中找出 $\triangle ABC$ 的费马点 P ，线段 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的长度即为 $\triangle ABC$ 的费马距离。

(3) 知识应用

已知三村庄 A, B, C 构成了如图 4 所示的 $\triangle ABC$ (其中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 均小于 120°)，现选取一点 P 打水井，使水井 P 到三村庄 A, B, C 所铺设的输水管总长度最小。求输水管总长度的最小值。

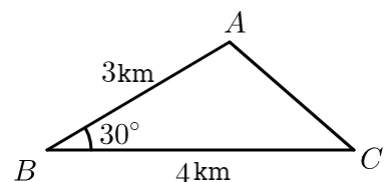


图4

【答案】（1）证明见解析．

（2） P_0D ； AD

（3）5千米．

【解析】（1）如图2，延长 BP 至 E ，使 $PE = PC$ ．

∵ 在等边 $\triangle ABC$ 中，

∴ $\angle EPC = \angle BAC = 60^\circ$ ，

∵ $PC = PE$ ，

∴ $\triangle PCE$ 为等边三角形，

∴ $PC = PE$ ， $\angle PCE = 60^\circ$ ，

∴ $\angle BCP + \angle PCE = \angle ACB + \angle BCP$ ，

∴ $\angle ACP = \angle BCE$ ，

∵ 在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} BC = AC \\ \angle BCE = \angle ACP \\ CE = PC \end{cases}$$

∴ $\triangle ACP \cong \triangle BCE$ (SAS)．

∴ $AP = BE = BP + PE = BP + PC$ ．

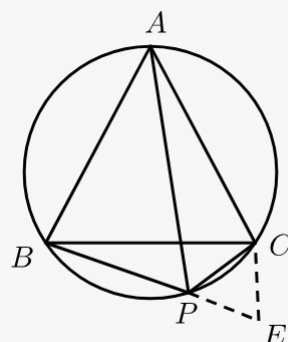


图2

（2）由（1）得出：第一步：如图3，在 $\triangle ABC$ 的外部以 BC 为边长作等边 $\triangle BCD$ 及其外接圆，

第二步：在 $\widehat{BC}$ 上取一点 P_0 ，连接 P_0A ， P_0B ， P_0C ， P_0D ．

易知 $P_0A + P_0B + P_0C = P_0A + (P_0B + P_0C) = P_0A + P_0D$ ，

第三步：根据（1）①中定义，在图3中找出 $\triangle ABC$ 的费马点 P ，线段 AD 的长度即为 $\triangle ABC$ 的费马距离，

故答案为： P_0D ； AD ．

